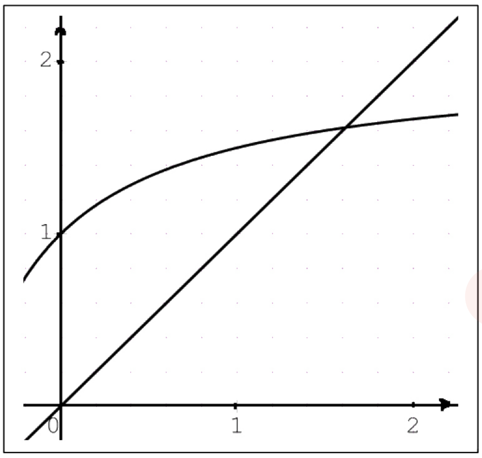
Nafouz

<u>نص الفرض :</u>

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;2]$ بِـــ : $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو موضح في الشكل أدناه :



1) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم

استنتج أنه إذا كان $x\in[1;2]$ ، فإن : $f(x)\in[1;2]$.

2) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بِـــ : $u_0=1$ ، $v_0=2$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$ ، $v_{n+1}=f(v_n)$.

أ. مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، v_0 ، v_1

لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) . مبرزا خطوط الانشاء.

ب. أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و(v_n).

3) برهن بالتراجع عن الخواص التالية : من أجل كل عدد طبيعي n :

" $1\le u_n\le 2$ " ؛ " $1\le v_n\le 2$ " ؛ " $u_n\le u_{n+1}$ " و " $v_n\ge v_{n+1}$ " .

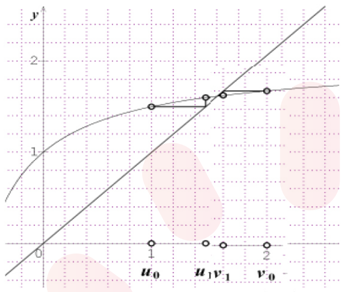
4) أ. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n-u_n\ge 0$ و $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$.

ج. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

د. استنتج أن للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس النهاية l .

هـــ. عين القيمة المضبوطة للعدد l .

		العلامة
	1. دراسة اتجاه تغير الدالة f : $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\succ 0$ اذن الدالة f متزايدة تماما على $[1;2]$. بما ان f متزايدة تماما على $[1;2]$ فان $x\in[1;2]$ يعني $f(x)\in[f(1);f(2)]$ أي $f(x)\in[1;2]$.	2
	2. تمثيل الحدود على محور الفواصل:  من خلال الرسم يتضح لنا ان (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ولهما نفس النهاية أي متقاربتان نحو L .	2
	3. البرهان بالتراجع: 1) $1\le u_n\le 2$: * n=0 نجد $u_0=1$ أي $1\le u_0\le 2$ اذن الخاصية محققة من اجل n=0. * نفرض ان $1\le u_n\le 2$ محققة ونبرهن ان $1\le u_{n+1}\le 2$ محققة: الدالة f متزايدة معناه $1\le u_n\le 2$ يعطي لنا $f(1)\le f(u_n)\le f(2)$ أي $1\le u_{n+1}\le 2$. • نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ان $1\le u_n\le 2$.	1
	2) $1\le v_n\le 2$: * n=0 نجد $v_0=2$ أي $1\le v_0\le 2$ اذن الخاصية محققة من اجل n=0. * نفرض ان $1\le v_n\le 2$ محققة ونبرهن ان $1\le v_{n+1}\le 2$ محققة: الدالة f متزايدة معناه $1\le v_n\le 2$ يعطي لنا $f(1)\le f(v_n)\le f(2)$ أي $1\le v_{n+1}\le 2$. • نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ان $1\le v_{n+1}\le 2$.	1
	3) $u_n\le u_{n+1}$: * n=0 نجد $u_0=1$ و $u_1=f(u_0)=\frac{3}{2}$ و منه $u_0\le u_1$ اذن الخاصية محققة من اجل n=0 . * نفرض ان $u_n\le u_{n+1}$ ونبرهن ان $u_{n+1}\le u_{n+2}$: الدالة f متزايدة معناه $u_n\le u_{n+1}$ يعطي لنا $f(u_n)\le f(u_{n+1})$ أي $u_{n+1}\le u_{n+2}$. • نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ان $u_n\le u_{n+1}$.	1
	4) $v_n\ge v_{n+1}$: * n=0 نجد $v_0=2$ و $v_1=f(v_0)=\frac{5}{3}$ و منه $v_0\ge v_1$ اذن الخاصية محققة من اجل n=0 .	1

* نفرض ان $v_n \ge v_{n+1}$ ونبرهن ان $u_{n+1} \le u_{n+2}$:

الدالة f متزايدة معناه $v_n \ge v_{n+1}$ يعطي لنا $f(v_n) \ge f(v_{n+1})$ أي $v_{n+1} \ge v_{n+2}$.

- نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ان $v_n \ge v_{n+1}$.

4) أ) لدينا :

2

$$v_{n+1}-u_{n+1}=f(v_n)-f(u_n)=\frac{2v_n+1}{v_n+1}-\frac{2u_n+1}{u_n+1}$$
$$=\frac{(2v_n+1)(u_n+1)-(v_n+1)(2u_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)}=\boxed{\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}}$$

ب) استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $v_n-u_n \ge 0$ و $v_{n+1}-u_{n+1} \le \frac{1}{4}(v_n-u_n)$:

2

* من اجل n=0 نجد $v_0-u_0=2-1=1 \ge 0$ اذن الخاصية محققة من اجل n=0.

* نفرض ان $v_n-u_n \ge 0$ ونبرهن ان $v_{n+1}-u_{n+1} \ge 0$:

لنا $v_n-u_n \ge 0$ وبما ان الدالة f متزايدة نجد $f(v_n)-f(u_n) \ge 0$ أي $v_{n+1}-u_{n+1} \ge 0$.

* نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $\boxed{v_n-u_n \ge 0}$.

و لدينا $1 \le u_n \le 2$ ومنه $2 \le u_n+1 \le 3$ ....(1) وأيضا $1 \le v_n \le 2$ ومنه $2 \le v_n+1 \le 3$ ...(2)

2

بالجداء (1) في (2) نجد $4 \le (u_n+1)(v_n+1) \le 9$ ومنه $\frac{1}{9} \le \frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)} \le \frac{1}{4}$ أي

$\frac{1}{9}(v_n-u_n) \le \frac{v_n-u_n}{(u_n+1)(v_n+1)} \le \frac{1}{4}(v_n-u_n)$ ومنه $\boxed{v_{n+1}-u_{n+1} \le \frac{1}{4}(v_n-u_n)}$.

ج) اثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $v_n-u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

وجدنا سابقا ان $v_{n+1}-u_{n+1} \le \frac{1}{4}(v_n-u_n)$ ومنه :

2

$$v_1-u_1 \le \frac{1}{4}(v_0-u_0)$$
$$v_2-u_2 \le \frac{1}{4}(v_1-u_1)$$
$$v_3-u_3 \le \frac{1}{4}(v_2-u_2)$$
$$\vdots$$
$$v_n-u_n \le \frac{1}{4}(v_{n-1}-u_{n-1})$$

نجد $v_n-u_n \le \underbrace{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\dots\times\frac{1}{4}}_{n\ fois}(v_0-u_0)$ ومنه $v_n-u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

د) مما سبق وجدنا انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n \le u_{n+1}$ أي $u_{n+1}-u_n \le 0$ ان المتتالية متزايدة

2

وأيضا $v_n \ge v_{n+1}$ اي $v_{n+1}-v_n \le 0$ أي ان المتتالية (v_n) متناقصة وأيضا لنا $v_n-u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ومنه $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n) \le \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ أي $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ ومنه فانهما متتاليتين متجاورتين أي لهما نفس النهاية L .

هـ) تعيين القيمة المضبوطة للنهاية L : النهاية L تحقق $\frac{2L+1}{L+1}=L$ ومنه نجد المعادلة $L^2-L-1=0$

2

وبحل هذه المعادلة وعلما انها موجبة لان جميع الحدود موجبة نجد $\boxed{L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.